R(K)における表現測度(函数環に関連した諸問題)

和田, 淳藏

数理解析研究所講究録
523巻 1984年 96-107

R(K)における表現測度

早大教育　和田淳蔵(Junzo Wada)

R(K)における表現測度、とくにArens-Singer測度とJensen測度について考える。これらの特徴付けと、その間の関係について、最近の結果を紹介することを中心にして、論じたい。

1. Xをコンパクト Hausdorff 空間とし、AをX上の関数環とする。M_AをAの極大イデアル空間とする。

$M_A \ni p$, σをX上の確率測度とする。

σをAにおけるpのArens-Singer測度であるとは

$$\log|f(p)| = \int \log|f|\,d\sigma \quad (f \in A^{-1})$$

となることをいう。ここで$A^{-1} = \{f \in A\,;\, f^{-1} \in A\}$。

またσがAにおけるpのJensen測度であるとは

$$\log|f(p)| \leqq \int \log|f|\,d\sigma \quad (f \in A)$$

となることである。pのJensen測度は、pのArens-Singer

測度で、かつこの2つとも、Aにおけるpの表現測度となる。すなわち

$$f(p)=\int f\,d\sigma \qquad (f\in A)$$

$\Gamma=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$、Aを$\Gamma$上のdisk環のとき、$|z|<1$となる$z$の表現測度は$\frac{1}{2\pi}P_r(\theta-t)d\theta$ $(z=re^{it})$である。ここで$P_r(\theta)$はPoisson核。

Kを$\mathbb{C}$のコンパクト部分集合とし、R(K)でKの外側に極をもつ有理関数全体のK上での閉包を表わす。これはまた、Kのある近傍で解析的である関数全体のK上での閉包と同じである。R(K)はK上の関数環である。

ここで$M_{R(K)}=K$となることはよく知られている。

またP(K)でzの多項式全体のK上での閉包、すなわちK上でzの多項式で一様近似される関数全体を表わす。P(K)はK上の関数環で$P(K)\subset R(K)$である。

Kを$\mathbb{C}$のコンパクト部分集合とし、K上に台をもつ有限測度νのCauchy変換$\hat{\nu}$とは、

$$\hat{\nu}(\zeta)=\int\frac{d\nu(z)}{z-\zeta} \qquad (\zeta\in\mathbb{C})$$

を表わす。$\hat{\nu}$はνと、局所的に積分可能な関数$\frac{1}{z}$との、たたみこみ(convolution)であって、これは$\mathbb{C}$の測度0を除いた

所で定義される。

また ν の対数ポテンシャル (logarithmic potential) にマイナスをつけたものを考える：

$$V_\nu(\zeta) = \int \log|z-\zeta|\, d\nu(z) \qquad (\zeta \in \mathbb{C})$$

これは ν と局所的に積分可能な関数 $\log|z|$ との，たたみこみ (convolution) として，$\mathbb{C}$ のある測度 0 の集合を除いた所で定義される。また V_ν は ν の台の外側で調和となる。

K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とし，ν を K 上の確率測度とし，$K \ni p$ とする。ν が $R(K)$ における p の表現測度である条件を考える。

定理 1.1。ν を K 上の確率測度とし，$K \ni p$ とする。そのとき，つぎは同値である。

(i) ν は $R(K)$ における p の表現測度である。

(ii) $$\hat{\nu}(\zeta) = \frac{1}{p-\zeta} \qquad (\zeta \in \mathbb{C}\setminus K)$$

(iii) $V_\nu(\zeta) - \log|\zeta - p|$ は $\mathbb{C}\setminus K$ の任意の連結成分の上で定数となる。

証明。(ii) → (iii)。$\frac{\partial}{\partial\zeta} V_\nu = -\frac{1}{2}\hat{\nu}$。 $\zeta \neq z$ なら $\frac{\partial}{\partial\zeta}\log|\zeta - z|$
$= \frac{1}{2}\frac{1}{\zeta - z}$ であるから (ii) より

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(V_\nu(\xi) - \log|\xi - p|\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\xi} - \hat{\nu}(\xi)\right] = 0.$$

$V_\nu(\xi) - \log|\xi - p|$ は実関数であるから、$\mathbb{C}\setminus K$ の任意の連結成分の上で定数となり (iii) を得る。(iii) → (ii) は明らか。

(ii) → (i)。 (ii) より

$$\int \frac{d\nu(z)}{z-\xi} = \hat{\nu}(\xi) = \frac{1}{p-\xi}$$

ゆえに $\displaystyle\int \frac{d\nu(z)}{z-\xi} = \int \frac{d\delta_p(z)}{z-\xi}$ （ここで δ_p は p の Dirac 測度）

これから $\hat{\nu}(\xi) - \hat{\delta}_p(\xi) = 0$ $(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$。このことより、

$\nu - \delta_p \perp R(K)$, すなわち $\int f(d\nu - d\delta_p) = 0$ $(f \in R(K))$。

ゆえに $f(p) = \int f d\nu$ $(f \in R(K))$ となり (i) を得る。

(i) → (ii) は明らか。

注意。この定理は [4] P.35 に見られるが、その証明に不完全な所があるので、上のように訂正した。

2. つぎに $R(K)$ における Arens－Singer 測度と Jensen 測度の特徴付けについて考えて見る。

K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とする。$H(K)$ で、K のある近傍で調和である関数全体の $C_R(K)$ での閉包と定義する。

ここで $H(K)$ は $\log|R(K)^{-1}|$ で張られた部分空間の閉包であることがわかる。

定理2.1　$K \ni p$，ν を K 上の確率測度とする。そのときつぎは同値である。

(i)　ν は $R(K)$ における p の Arens-Singer 測度である。

(ii)　ν は $H(K)$ 上で p を表現する。すなわち K のある近傍で調和である任意の関数 u で

$$u(p) = \int u\,d\nu$$

(iii)　$V_\nu(\xi) = \log|\xi - p|$　$(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$。

証明。(i) → (ii)。(i) より $\int \log|f|\,d\nu = \log|f(p)|$　$(f \in R(K)^{-1})$。

ゆえに $\int u\,d\nu = u(p)$　$(u \in H(K))$ となり (ii) が得られる。

(ii) → (i) は明らか。

(iii) → (ii)。u を $\mathbb{C}$ の上で無限回微分可能な関数でコンパクトな台をもち、K のある近傍で調和とする。そのとき u はそのラプラシアンの対数ポテンシャルとして表わされる；

$$u(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\iint (\Delta u)(z)\log|z-\xi|\,dx\,dy \quad (\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$$

これは Green の公式から得られる。

u は K の近傍で調和であるゆえ、そこで $\Delta u = 0$。ゆえに

$$\int u(\xi)\,d\nu(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus K} (\Delta u)(z)\left[\int \log|z-\xi|\,d\nu(\xi)\right]dx\,dy$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int (\Delta u)(z)\log|z-p|\,dxdy = u(p)。$$

(ii) → (iii)。 $u(z) = \log|z-\xi|$ $(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$ は K のある近傍で調和。ゆえに

$$V_\nu(\xi) = \int \log|z-\xi|\,d\nu(z) = \log|p-\xi|。$$

つぎに R(K) における Jensen 測度を考える。これは B. Cole によって与えられた。

定理 2.2. $K \ni p$, ν を K の上の確率測度とする。そのとき、つぎは同値である。

(i) ν は R(K) における p の Jensen 測度である。

(ii) ν はつぎをみたす。

a) $\log|\xi-p| \leqq \int \log|\xi-z|\,d\nu(z)$ $(\xi \in \mathbb{C})$

b) $\log|\xi-p| = \int \log|\xi-z|\,d\nu(z) = V_\nu(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{C}\setminus K)$。

(iii) u が K のある近傍で劣調和のとき

$$u(p) \leqq \int u\,d\nu$$

証明。(i) → (ii)。(ii) の a) は関数 $z \to \xi - z$ に対する Jensen の不等式を表わし、b) は ν が Arens-Singer 測度であるから明らか。

(ii) → (iii)。 u を K のある近傍で劣調和とする。Riesz の

分解定理により

$$u(z) = v(z) + \int \log|z-\xi|\,d\tau(\xi) \qquad (z\in K)。$$

ここで、τはKのあるコンパクト近傍に台をもつ正測度でvはKのある近傍で調和である。

Fubiniの定理より

$$\int u(z)\,d\nu(z) = \int v(z)\,d\nu(z) + \iint \log|z-\xi|\,d\nu(z)\,d\tau(\xi)$$

$$\geqq v(p) + \int \log|\xi - p|\,d\tau(\xi) = u(p)。$$

すなわち(iii)を得る。ここで(ii) b)は定理2.1によってKのある近傍で調和な任意の関数vで $v(p) = \int v(z)\,d\nu(z)$ であることと同値であるという事実を用いてある。

(iii)→(i)。fをKの外側に極をもつ有理関数とする。そのとき $\log|f|$ はKのある近傍で劣調和。(iii)より

$$\log|f(p)| \leqq \int \log|f|\,d\nu$$

このようなfの全体はR(K)の中で稠密であるから、R(K)の任意の元fで上が成り立つ。

3. さてここでR(K)におけるArens-Singer測度とJensen測度との関係を述べる。

まず、つぎのような結果が知られている（[1]）。

定理3.1. $K \ni p$，ν を K の境界 ∂K 上の確率測度とする。そのとき、ν が $R(K)$ における p の Jensen 測度であることと、ν が $R(K)$ における p の Arens-Singer 測度であることとは同等である。

この定理では、ν は ∂K 上の確率測度であるという仮定がついているが、この仮定がないときは結果は大変に複雑となる。

これについてつぎに述べていく。

いま A をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環とする。

X 上の確率測度全体を $\mathbb{M}$ とする。$\mathfrak{S}$ を $\mathbb{M}$ の部分集合としたとき、$\mathfrak{S}$ の affine completion とは、$\mathfrak{S}$ で生成された w^*-閉アファイン空間と $\mathbb{M}$ との共通部分をいう。これを $\hat{\mathfrak{S}}$ で表わす。$\mathfrak{S}$ が affinely complete であるとは、$\hat{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$ となることをいう。$M_A \ni p$ で、p の Arens-Singer 測度全体の集合は affinely complete であることがすぐ確められる。

いま A における p の Arens-Singer 測度全体を $\mathfrak{A}$，A における p の Jensen 測度全体の集合を $\mathfrak{J}$ で表わすと、一般に $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$ であるから、$\hat{\mathfrak{J}} \subset \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ となっている。ここで $\hat{\mathfrak{J}} = \mathfrak{A}$ となっているかという問がある。これを $A = R(K)$ の場合に考える。

このために最初に $\mathbb{C}$ 上の fine topology について述べる。

$\mathbb{C}$ 上の fine topology とは、$\mathbb{C}$ 上の劣調和関数すべてが連続（$-\infty$ もとり得る実数値関数として）となるような最弱な位相をいう。$\mathbb{C}$ 上の fine topology は $\mathbb{C}$ 上の普通の位相より強くなるが、つぎのような性質をもっている。

1° $\mathbb{C}$ 上の fine topology は局所連結位相である。ゆえに任意の finely open（fine topology で開集合）な $\mathbb{C}$ 上の集合は、互いに共通点のない finely connected component の高々可算個の和集合となっている。

2° $\mathbb{C}$ 上の finely open な集合 U と $U \ni x$ に対して、x を中心とする、いくらでも小さな円周が U に含まれる。

ここでつぎの定理が成り立つ（[5]）。

定理3.2. K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とする。U を K の fine interior（fine topology に関しての内部）の fine connected component とし、$U \ni p$ とする。

このとき、$R(K)$ に関する p の Jensen 測度全体の affine completion は $\overline{U}$ に台をもつ $R(K)$ に関する p の Arens-Singer 測度全体と一致する。

証明。$U \ni p$ のとき、p の Jensen 測度の台は $\overline{U}$ に含まれることがわかる。ゆえに $R(K)$ に関する p の Jensen 測度全体の affine completion は、$R(K)$ に関する p の Arens-Singer 測度

で台を$\overline{U}$の中にもつものの全体に含まれる。

ゆえに、逆に$\overline{U}$に台をもつ任意のArens-Singer測度はJensen測度全体で生成されたアファイン空間のw^*-閉包の中に入ることが示されればよい。

それをつぎのように3つの部分に別けて証明する。

1° νを$\overline{U}$に台をもつPのArens-Singer測度とすれば、νは$H(\overline{U})$におけるPの表現測度となる。ゆえにδ_PをPのDirac測度とすれば

$$(*) \qquad \nu - \delta_P \in H(\overline{U})^{\perp}$$

すなわち$\int f(d\nu - d\delta_P) = 0 \quad (f \in H(\overline{U}))$となる。

さてPから発するBrown運動のUからのfirst exit timeをTとし、τを$\tau \leq T$となる任意のstopping timeとすれば、つぎのように$\overline{U}$の上の確率測度σ_τが存在する：

$$\int h \, d\sigma_\tau = \int h(b_\tau(w)) \, dw$$

ここでそのBrown運動を$\{b_t\}$とし、Brownian pathの空間の上のWiener測度をdwとする。

ここでσ_τは$R(\overline{U})$におけるPのJensen測度であることが示せる。なんとなれば、hを$\overline{U}$のある近傍で劣調和とすれば、$h \circ b_t$はsubmartingaleとなる。またstopping time $\tau > 0$であるから$\int h \, d\sigma_\tau = \int h \circ b_\tau \, dw \geqq \int h \circ b_0 \, dw = h(P)$。

ゆえに定理2.2よりσ_τはR($\overline{U}$)におけるpのJensen測度となる。

2° つぎにhを有界でUの上でfinely harmonicなら$h \circ B_t$ ($t < T$)はmartingale。上と同じような論法で$h(p) = \int h \, d\sigma_\tau$となる。一方$h(P) = \int h \, d\delta_p$であるから、$\sigma_\tau - \delta_p \in H(\overline{U})^\perp$。

これはH($\overline{U}$)は$\overline{U}$で連続で、Uでfinely harmonicな関数全体と一致することが知られている([1])ことから導かれる。

ここで$\mathfrak{S}$を$\{\sigma_\tau - \delta_p : 0 < \tau < T,\ \tau$はstopping time$\}$の張る線形空間とすれば、$\mathfrak{S} \subset H(\overline{U})^\perp$となる。ここでまた$\mathfrak{S}$が$H(\overline{U})^\perp$の中で$w^*$-denseとなることも示される。

3°。 1°の(*)より$\nu - \delta_p \in H(U)^\perp = \overline{\mathfrak{S}}^{w^*}$($\mathfrak{S}$の$w^*$-閉包)であるから、$\mathfrak{S}$の元$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sigma_{\tau_i} - \delta_p)$で

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sigma_{\tau_i} - \delta_p) \longrightarrow \nu - \delta_p \quad (w^*)$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma_{\tau_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1\right) \delta_p \rightarrow \nu \ (w^*)。$$

ところがσ_{τ_i}, δ_pはともにpのJensen測度となる。

このことからνはJensen測度全体のaffine completionの中に入ることになり、この定理は証明された。

定理3.2はJensen測度全体とArens-Singer測度全体との関係をある程度明らかにしているが、条件がいろいろついている。$\mathbb{C}$の上のfine topologyに関しては、比較的いい性質があるので（たとえば[3]参照）、この定理はまだ改良の余地はあるように思う。

参照文献

[1] A. Debiard and B. Gaveau: Potential fin et algèbras de fonctions analytiques I, J. Functional Analysis 16 (1974) 289–304.

[2] B. Fuglede: Finely Harmonic Functions, Springer Lecture Notes in Math., 289 1972.

[3] B. Fuglede: Fonctions harmoniques et fonctions finement harmoniques, Ann. Inst. Fourier 24 (1974) 77–91.

[4] T. W. Gamelin: Uniform Algebras and Jensen Measures, London Math. Soc., Lecture Notes 32, 1978.

[5] T. W. Gamelin and T. J. Lyons: Jensen measures for R(K), J. London Math. Soc., 27 (1983) 317–330.